Feuille 6 bis

Exercice 1 :

* Inverse de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Id.$

On cherche M inverse de Id, donc M telle que $M Id = Id \cdot M = Id$

On déduit que $\boxed{M = Id}$.

* Inverse de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A$:

On cherche N inverse de A, donc N telle que $N \times A = A \times N = Id$.

On suppose que $N = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$.

Et on sait que

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

donc on a les 3 systèmes suivants à résoudre :

$$\begin{cases} a + c = 1 \\ b = 0 \\ 2a + b + c = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} d + f = 0 \\ e = 1 \\ 2d + e + f = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} g + i = 0 \\ h = 0 \\ 2g + h + i = 1 \end{cases}$$

On en déduit que

$$\boxed{N = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}}.$$

Exercice 2 :

En choisissant $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ on a

$A \times B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $B \times A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Donc $AB \neq BA$.

Exercice 3 :

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y \\ -y \\ x+z \end{pmatrix}$$

1) * f isomorphisme ?

f est linéaire (exercice) et on a

$$\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} x+y=0 \\ -y=0 \\ x+z=0 \end{cases} \right\} = \{\vec{0}\}.$$

Donc f est injective.

Or d'après le théorème du rang

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f)$$
$$\Leftrightarrow \quad 3 = \dim(\operatorname{Im} f)$$
$$\Leftrightarrow \quad \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$$
$$\Leftrightarrow \quad f \text{ surjective.}$$

Donc $\boxed{f \text{ est linéaire et bijective}}$.

* Inverse de f :

Soit $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tel que $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

On résoud (en x, y, z) le système :

$$\begin{cases} x+y=a \\ -y=b \\ x+z=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a-y = a+b \\ y=-b \\ z = c-x = c-(a+b) = c-a-b \end{cases}$$

Donc
$$\boxed{\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} a+b \\ -b \\ c-a-b \end{pmatrix} \end{aligned}}.$$

2) La matrice de f dans la base canonique est donnée par

$$M = \left(f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\; f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\; f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M}$$

3) Comme f est inversible, la matrice de f dans la base canonique est inversible, ie : M inversible.

Et l'inverse de M est la matrice de f^{-1} dans la base canonique, autrement dit

$$M^{-1} = \left(f^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad f^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad f^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right) = \boxed{\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix} = M^{-1}}$$

4) Montrons que les colonnes de M forment une base de $\mathbb{R}^3$:

Soit $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ la famille des vecteurs colonnes de M.

Comme $\#\mathcal{F} = 3$, il suffit de montrer que $\mathcal{F}$ est libre pour montrer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Soient donc $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

On a alors

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -\beta = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Ainsi, $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$.

Donc $\mathcal{F}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.

Et donc $\boxed{\mathcal{F} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$

5) M matrice de passage ?

Soient $\mathcal{B} = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ et $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ des bases de $\mathbb{R}^3$.

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est donnée par

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(id) = \left([id(\vec{e_1})]_{\mathcal{B}'} \;\middle|\; [id(\vec{e_2})]_{\mathcal{B}'} \;\middle|\; [id(\vec{e_3})]_{\mathcal{B}'} \right) = \left([\vec{e_1}]_{\mathcal{B}'} \; [\vec{e_2}]_{\mathcal{B}'} \; [\vec{e_3}]_{\mathcal{B}'} \right)$$

Dans une matrice de passage, les colonnes forment en fait une base (en tant que coordonnées des éléments d'une base exprimées dans une nouvelle base).

Comme les colonnes de M forment une base de $\mathbb{R}^3$, M est une matrice de passage.

Et $M = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{C}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{C}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{C}} \right)$ où $\mathcal{C}$ désigne la base canonique.

Donc M est une $\boxed{\text{matrice de passage de } \mathcal{F} \text{ à } \mathcal{C}}$.

6) Montrons qu'un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ envoie une base sur une base :

Soit $\mathcal{B} = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}\}$ une base quelconque de $\mathbb{R}^3$.

Et soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un isomorphisme quelconque de $\mathbb{R}^3$.

Comme $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}$ est en particulier libre. Donc

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},\ \alpha \vec{b_1} + \beta \vec{b_2} + \gamma \vec{b_3} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

$$\underset{f \text{ bijective}}{\Leftrightarrow} \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},\ f(\alpha \vec{b_1} + \beta \vec{b_2} + \gamma \vec{b_3}) = \underbrace{f(\vec{0}) = \vec{0}}_{f \text{ linéaire}} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

$$\underset{f \text{ linéaire}}{\Leftrightarrow} \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},\ \alpha f(\vec{b_1}) + \beta f(\vec{b_2}) + \gamma f(\vec{b_3}) = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Ainsi, on a démontré que $\mathcal{B}' = \{f(\vec{b_1}), f(\vec{b_2}), f(\vec{b_3})\}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$. Comme de plus $\# \mathcal{B}' = 3$, $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ ∎